Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Reihen** mit Lösungen
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Cauchy Konvergenzkriterium*
Bekannterweise konvergiert eine Folge **reeller** Zahlen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, also wenn gilt, dass Differenz zweier beliebiger Folgenglieder ab einem bestimmten Index kleiner als jeder vorgelegte (positive) Wert wird,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N$$

Eine Reihe reeller Summanden $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R} \; \forall k \in \mathbb{N}$, konvergiert nach dem Cauchykriterium wiederum genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq N.$$

Erläutern Sie den Zusammenhang beider Konvergenzbegriffe in eigenen Worten und versuchen Sie das Cauchykriterium als (möglichst einfachen) deutschen Satz zu formulieren.

Lösung.
Wir können prinzipiell eine (unendliche) Reihe umschreiben als Grenzwert ihrer Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Das heißt, der Wert einer unendlichen Reihe ist gleich dem Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen $\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \right\}_{n=1,2,\ldots}$. Falls dieser existiert, so ist diese Folge auch eine Cauchy-Folge und es gilt (o.E. $n > m$)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq N.$$

Das heißt, das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von (unendlichen) Reihen sagt nichts aus, außer:
Eine (unendliche) Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchyfolge ist. □

Aufgabe 2 (2) *Anwendung Cauchy-Konvergenzkriterium*
Weisen Sie mit dem Cauchysschen Konvergenzkriterium nach, dass die sog. harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

nicht konvergiert.

Lösung.
Um nachzuweisen, dass eine Reihe *nicht* konvergiert müssen wir ein $\varepsilon > 0$ finden, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $n > m \geq N$ existieren mit

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \geq \varepsilon.$$

An unserem Beispiel also

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \geq \varepsilon.$$

Da die von uns gesuchten natürlichen Zahlen n und m beliebig groß (bzw. größer als jede vorgegebene natürliche Zahl N) sein müssen, können wir nur eine der beiden wählen, damit die andere beliebig groß gewählt werden kann. Da wir wollen, dass unsere Summe größer als ein fester Wert wird, gibt es Sinn, n in Abhängigkeit von m zu wählen. Für $n = 2m$ ergibt sich schließlich

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

wodurch unser $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gefunden und damit die Divergenz der Reihe nachgewiesen ist.[1] □

Aufgabe 3 (2) *Konvergenz von Reihen für fast alle Summanden*

Beweisen Sie, dass eine (komplexe) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn sie für fast alle Summanden konvergiert, also ein $K \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Lösung.
$\Rightarrow$:
Für die Hinrichtung wähle einfach K = 0.
$\Leftarrow$:
Angenommen, die Reihe $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ konvergiere. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{k=K}^{\infty} a_k = a$$

Daraus folgt allerdings

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=K}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{K-1} a_k = \left(a + \sum_{k=0}^{K-1} a_k\right) \in \mathbb{C}$$

und damit ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. □

Aufgabe 4 (2-3) *Konvergenz der geometrischen Reihe*
Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.
Beweisen Sie, dass die sog. geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot z^k \qquad c \in \mathbb{C}$$

genau dann konvergiert, wenn $|z| < 1$ oder $c = 0$. Wie lautet ihr Grenzwert?
Tipp: Für die Konvergenz überlegen Sie sich zuerst eine geschlossene Formel für die Partialsummen der Reihe.

[1] Die erste Abschätzung hier kann man sich klarmachen, indem man sich überlegt, wie viele Summanden man blockweise zusammennaddieren muss, um immer über einen festen Wert zu kommen. Vergleiche auch Aufgabe 16 i).

Lösung.
Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.
Betrachten wir die Folge der Partialsummen, so können wir zunächst einmal das c vor die Summe ziehen und uns eine Formel für die Summe ohne c überlegen:

$$\sum_{k=0}^{n} c \cdot z^k = c \sum_{k=0}^{n} z^k = c(1 + z + z^2 + \cdots + z^n) \qquad c \in \mathbb{C}$$

Der Trick ist nun, das z-fache der Summe von sich selbst zu subtrahieren, da wir damit eine Teleskopsumme bekommen, deren Wert wir leichter ausrechnen können. Es gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - z \cdot \sum_{k=0}^{n} z^k = (1+z+z^2+\cdots+z^n) - (z+z^2+z^3+\cdots+z^n+z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}$$

Umstellen liefert die geschlossene Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \wedge z \neq 1$$

Womit wir den Wert der Reihe berechnen können

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot z^k = c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{c}{1-q} \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Dabei konvergiert die Reihe genau für $|z| < 1$, da $|z|^n$ genau dann konvergiert, wenn $|z| < 1$ (siehe Kapitel "Folgen"). (Für $c = 0$ ist die Konvergenz offensichtlich). □

Aufgabe 5 (1) *Geometrische Reihen*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{3^{k-2}}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{6}\right)^k$

f) $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \qquad q \in (-1,1)$ und $m \in \mathbb{N}$

Lösung.

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \overset{A4}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$$

c) $$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{3^{k-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2}} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \overset{a)}{=} \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

d) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2}\right)^k \overset{|\frac{1-i}{2}|=\frac{1}{2}<1}{=} \frac{1}{1-\frac{1-i}{2}} = \frac{2}{1+i}$$

e) $$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^k = -(\frac{3+4i}{6})^0 - (\frac{3+4i}{6})^1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{6}\right)^k = -1 - \frac{3+4i}{6} + \frac{1}{1-\frac{3+4i}{6}}$$
$$= -\frac{9+4i}{6} + \frac{6}{3-4i} = -\frac{39}{50} + \frac{22}{75}i$$

f) Sei $q \in (-1,1)$ und $m \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{q^m}{1-q}$$

$\square$

Aufgabe 6 (2-3) *Verwandte Reihen zur geom. Reihe*
Zeigen Sie für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Lösung.
Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Wir wissen nach Aufgabe 4 schon das gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k + \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k + \frac{1}{1-q} \overset{!}{=} \frac{1}{(1-q)^2}$$

Umformung zeigt, dass wir nur noch

$$(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} kq^k + 1 \overset{!}{=} \frac{1}{1-q}$$

nachweisen müssen. Wir betrachten zunächst die Partialsummen, da diese einfacher zu handhaben sind und bilden dann den Grenzwert

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} kq^k + 1 = \sum_{k=0}^{n} kq^k - q\sum_{k=0}^{n} kq^k + 1$$
$$= (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n) - (q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + nq^{n+1})$$
$$= (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - nq^{n+1}) = -nq^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k$$

und bei Grenzwertbildung

$$(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} kq^k + 1 = \lim_{n\to\infty}\left((1-q)\sum_{k=0}^{n} kq^k + 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-nq^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k\right) = 0 + \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

□

Aufgabe 7 (1-2) *Verwandte geometrische Reihen*
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k$ (*Tipp:* $kq^k = q\frac{d}{dq}q^k$)

Lösung.

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{A7}{=} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$$

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{a)}{=} \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

c) $$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^{k+1} = q\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

d) $$\sum_{k=0}^{\infty} k^2q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q\frac{d}{dq}kq^k \overset{Anm.2}{=} q\frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = q\frac{d}{dq}\frac{1}{(1-q)^2} = q\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

2

□

[2] An dieser Stelle benötigt man die absolute Konvergenz der geometrischen Reihe, damit man die Ableitung vor die Reihe ziehen kann. Siehe dazu spätere Aufgaben zur absoluten Konvergenz von Reihen.

Aufgabe 8 (2-3) *Notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen*
Sei $\{a_n\}_{n=1,2,...} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen.
Überlegen Sie sich, in welchem logischen Zusammenhang (Implikation, Äquivalenz) die beiden folgenden Aussagen stehen und beweisen Sie ihre Vermutung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Lösung.
Es ist für die Konvergenz einer Reihe nicht hinreichend, dass ihre Summanden eine Nullfolge bilden (es gilt also **nicht** i) $\Rightarrow$ ii)), wie man sich am Beispiel der harmonischen Reihe klarmachen kann.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \text{aber} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

Tatsächlich stimmt es aber, dass die Summanden notwendig eine Nullfolge bilden müssen, wenn die Reihe konvergieren soll (also gilt: ii) $\Rightarrow$ i)).

Denn angenommen, die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$. Dann können wir über die Partialsummen der Reihe den Wert a_n umschreiben zu

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_n$$

Betrachten wir nun den Grenzwert der Summanden, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n - \sum_{k=0}^{\infty} a_n = a - a = 0.$$

□

Aufgabe 9 (3) *Majorantenkriterium*
Beweisen folgenden Satz zur Konvergenz von majorisierten Reihen (sog. Majorantenkriterium):
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe.
Wenn es eine konvergente reelle Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut).
Reicht es auch aus, wenn $|a_k| \leq b_k$ für fast[3] alle $k \in \mathbb{N}$ gilt?

Lösung.
Sei also alles definiert und gegeben wie in der Aufgabenstellung.

[3] Also ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq N$ gilt.

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge der Partialsummen $\left\{\sum_{k=0}^{n} b_k\right\}_{n=1,2,\ldots}$. Ist diese Folge konvergent, so ist sie nach dem Monotoniesatz aber auch beschränkt und damit auch $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n=1,2,\ldots}$, denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \overset{Vor.}{\leq} \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

Außerdem ist $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n=1,2,\ldots}$ monoton steigend, da jeder Summand nicht-negativ ist und damit

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = |a_n| \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach dem Monotoniesatz ist damit aber $\left\{\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergent und somit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Nach Aufgabe 3 muss diese Bedingung nur für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gelten, da wir die Summanden, die sie nicht erfüllen aus der Reihe herausnehmen können und mit der Konvergenz der dadurch entstehenden Summe die der ursprünglichen nachweisen würden. □

Aufgabe 10 (1) *Dezimaldarstellung reeller Zahlen*
Bekannterweise kann man jede reelle Zahl $x \in [0, 10]$ zwischen 0 und 10 als (endlosen) Dezimalbruch

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \qquad a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

schreiben. Rechtfertigen Sie diese Behauptung, indem Sie die Konvergenz der hier abgebildeten Reihe nachweisen.

Lösung.
Sei also alles gegeben wie in der Aufgabenstellung.
Wir können jede Ziffer der Dezimalentwicklung abschätzen über

$$|a_k| = a_k \leq 10 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

und mit dem Majorantenkriterium (Aufgabe 9) folgt damit aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = 10 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k} = 10 \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11,\overline{1} < \infty$$

die von x.

□

Aufgabe 11 (2) *Teleskopreihen I*

i) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

indem Sie zunächst eine explizite Formel für die Partialsummen finden und dann den Grenzwert bilden.

ii) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Lösung.

i) Wir betrachten zunächst die ersten Glieder der Partialsummenfolge

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{3}, \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{3}{4}$$

Es ergibt sich die Vermutung[4]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

die wir prompt mit Induktion beweisen. Schließlich folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 < \infty$$

ii) Jetzt würden wir gerne das Majorantenkriterium anwenden, allerdings gilt leider

$$\left|\frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wir können uns aber mit einem Trick weiterhelfen. Es genügt nämlich, wenn die Reihe für fast alle Summanden konvergiert.[5] Nehmen wir nämlich den ersten Summanden aus der Reihe, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

und da

$$\left|\frac{1}{(k+1)^2}\right| = \frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

folgt mit dem Majorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty.$$

[4] Dem Name der Aufgabenstellung folgend könnten wir die Formel auch mit einer Partialbruchzerlegung der Summanden gewinnen, bei der eine Teleskopsumme entstehen würde.

[5] Ein Beweis steht hier aus. Da die Konvergenz von Reihen allerdings mit dem Cauchy-Kriterium eine Eigenschaft für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dürfte einen solchen Beweis zu führen nicht allzu schwer sein.

□

Aufgabe 12 (2) *Teleskopreihen II*
Untersuchen Sie folgende Reihen auf ihre Konvergenz und geben Sie ggf. ihre Werte an:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right)$

Lösung.

i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n}{2n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2}$$

iii) $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right) = (n+1)^{n+1} - 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right) \to \infty$$

□

Aufgabe 13 (1-2) *Anwendung Majorantenkriterium*
Beweisen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2-1}{2k^5+k^2+2k+1}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{3k^4-2k^2+3}$

Lösung.
Die Hauptaufgabe beim Nachweis der Konvergenz einer Reihe mit Majorantenkriterium ist, die richtige Majorante zu finden. Oft reicht dabei die quadratische harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Da die Abschätzung der Summanden immer nach oben geht ($\leq$) gilt als Taktik: In jedem Schritt darf man den Zähler beliebig vergrößern und den Nenner beliebig verkleinern. Dabei muss man aber darauf achten, dass man trotzdem rechts bei den Summanden einer konvergenten Reihe herauskommt.

i) Mit folgender Abschätzung

$$\left|\frac{k}{k^3+1}\right| = \frac{k}{k^3+1} \leq \frac{k^3}{k^3+0} = \frac{1}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt mit dem Majorantenkriterium aus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

die Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

ii) Wir schätzen mit der Dreiecksungleichung ab

$$\left|\frac{2k^2-1}{2k^5+k^2+2k+1}\right| = \frac{|2k^2-1|}{2k^5+k^2+2k+1} \leq \frac{2k^2+1}{2k^5+k^2+2k+1}$$

$$\leq \frac{2k^2+k^2}{2k^4+k^2+2k+1} \leq \frac{3k^2}{2k^4} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und erhalten wie in i) die Konvergenz der Reihe mit Majorantenkriterium.

iii) Um den lästigen Betrag für unserere Abschätzungen loszuwerden benutzen wir, dass die höchste Potenz im Nenner (k^4) positiv ist und somit die kleineren (negativen) Potenzen irgendwann überwiegen wird. Damit ist der Nenner ab einer Grenze[6] $N \in \mathbb{N}$ positiv und wir können den Betrag ab dann weglassen. Für die Konvergenz der Reihe genügt es, wenn sie für fast alle Summanden konvergiert (vgl. Aufgabe 3)

$$\left|\frac{2k^2+3}{3k^4-2k^2+3}\right| = \frac{2k^2+3}{|3k^4-2k^2+3|} = \frac{2k^2+3}{3k^4-2k^2+3} \quad \forall k \geq N$$

Diesmal können wir nicht so einfach Einträge wegstreichen, da im Zähler positive und im Nenner negative Summanden stehen (die wegzulassen die $\leq$ Relation nicht erhalten würde). Stattdessen betrachte

$$\frac{2k^2+3}{3k^4-2k^2+3} \leq \frac{2k^2+3k^2}{3k^4-2k^2} \leq \frac{5k^2}{3k^4-2k^4} = \frac{5k^2}{k^4} = 5\cdot\frac{1}{k^2} \quad \forall k \geq N$$

und somit folgt die Konvergenz wieder über das Majorantenkriterium.
Anmerkung: Da die Abschätzungen zum Auffinden einer Majorante meistens ziemlich unschön sind, hat man sich als Vereinfachung das in der nächsten Aufgabe folgende, aus dem Majorantenkriterium abgeleitete Grenzwertkriterium überlegt.

□

Aufgabe 14 (3) *Grenzwertkriterium*
Weisen Sie das folgende praktische Korollar aus dem Majorantenkriterium nach:
Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit fast ausschließlich positiven Summanden, d.h. es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_k > 0, \quad b_k > 0 \qquad \forall k \geq N$$

und existiert außerdem der positive[7] Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c \in \mathbb{R}^+.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

[6] Diese Grenze kann wer will errechnen durch Umformung der Ungleichung $3k^4 \geq -2k^3 + 3$. Alternativ kann man die Grenze auch per Induktion nachweisen.

[7] Falls der Grenzwert 0 ist, kann man aus der Konvergenz der zweiten die der ersten Reihe folgern, aber nicht umgekehrt. Das macht man sich am besten an einem einfachen Beispiel klar.

Lösung.
Sei alles definiert wie in der Aufgabenstellung.
Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c > 0$. Aus der Definition des Grenzwertes folgt damit, dass für $\frac{c}{2} > 0$ ein $N_c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - c\right| < \frac{c}{2} \quad \forall k \geq N_c$$

gilt. Wählen wir nun $\tilde{N} = \max\{N, N_c\}$, so gilt zusätzlich zu dieser Ungleichung nach Voraussetzung noch, dass $a_k, b_k > 0$ für alle $k \geq \tilde{N}$ und wir können im Folgenden Beträge für die Summanden ignorieren.
Umformen der Ungleichung liefert

$$\frac{1}{2}c \cdot b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}c \cdot b_k \quad \forall k \geq \tilde{N}. \tag{1}$$

Angenommen, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann muss es auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ nach dem Majorantenkriterium wegen des linken Teils von Ungleichung (1) mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}c \cdot b_k < \infty.$$

Falls wir hingegen annehmen, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2}c \cdot b_k$ und nach dem Majorantenkriterium somit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ wegen des rechten Teils von Ungleichung (1). □

Aufgabe 15 (2) *Anwendung Grenzwertkriterium*

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{6k^4 - 3k}$ ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5k-6}{k^4 - 4}$ iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{2k^4+1}$

b) Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{Q}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} - 1$$

konvergiert.
Tipp: Sie dürfen verwenden, dass die allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

für $s > 1$ konvergiert (Beweis davon in Aufgabe 19).

Lösung.
Im Prinzip ist das Grenzwertkriterium eine Abkürzung des Majorantenkriteriums, wobei man in beiden Fällen erst das die passende Majorante finden muss. Für die meisten Reihen ergibt sich diese durch Ausklammern der Laufvariablen k mit dem höchsten Exponenten in Zähler und Nenner.

a) i) Zunächst bemerken wir, dass alle Summanden unserer Reihe positiv sind, da $2k^2 > 0$ und $6k^4 - 3k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir können also problemlos versuchen, das Grenzwertkriterium anzuwenden.
Dafür schreiben wir die Summanden der Reihe um zu

$$a_k = \frac{2k^2}{6k^4 - 3k} = \frac{k^2}{k^4} \cdot \frac{2}{6 - \frac{3}{k^3}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{6 - \frac{3}{k^3}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir also $b_k = \frac{1}{k^2}, \forall k \in \mathbb{N}$, so ergibt sich aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2}{6k^4 - 3k} \cdot k^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^4}{6k^4 - 3k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{6 - \frac{3}{k^3}} = \frac{1}{3} > 0$$

die Konvergenz unserer Reihe aus der von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

ii) Auch hier sind alle Summanden der Reihe positiv, wobei dies eventuell nicht so offensichtlich ist, wie bei der ersten Reihe. Für $k = 1$ haben wir einen negativen Zähler und einen negativen Nenner, weshalb der Summand positiv ist und für $k \geq 2$ sind sowohl Zähler als auch Nenner positiv.
Damit können wir das Kriterium anwenden und schreiben analog zu i) Summanden der Reihe um zu

$$\frac{5k - 6}{k^4 - 4} = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{5 - \frac{6}{k}}{1 - \frac{4}{k^4}}$$

wodurch sich mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k - 6}{k^4 - 4} \cdot k^3 = 5 > 0$$

mit dem Grenzwertkriterium die Konvergenz der Reihe aus der von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ergibt.

iii) Bei dieser Reihe haben wir zunächst ein Problem, denn es sind nicht alle Summanden positiv. Wir wissen aber, dass sowohl Zähler als auch Nenner unserer Summanden ab einem bestimmten Index positiv werden (da der Zählindex k mit höchstem Exponenten in Zähler und Nenner positiv sind). Folglich gibt es[8] ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{k - 2}{2k^4 + 1} > 0 \qquad \forall k \geq N.$$

Damit sind aber wieder fast alle Summanden positiv und wir können mit

$$\frac{k - 2}{2k^4 + 1} = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1 - \frac{2}{k}}{2 + \frac{1}{k^4}}$$

die Konvergenz unserer Reihe aus der von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ folgern.

b) Das Grenzwertkriterium kann auch für kompliziertere Reihen verwendet werden.
Wir bemerken zunächst, dass für $s \leq 0$ die Summandenfolge keine Nullfolge ist und die Reihe damit nach Aufgabe 8 divergiert.
Für $s > 0$ setzen wir

$$a_k = \sqrt{1 + \frac{1}{k^s}} - 1.$$

[8] In diesem Fall sieht man ziemlich schnell, dass $N = 3$ die Bedingung erfüllt, aber da das allgemein nicht so klar ist führen wir den Beweis hier so, als ob wir den Index nicht kennen würden.

Es ist a_k für alle $k \in \mathbb{N}$ positiv und mit dem Tipp folgt mit $b_k = \frac{1}{k^s}$ aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} - 1\right) \cdot k^s = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} + 1\right)} \cdot k^s$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^s}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} + 1\right)} \cdot k^s = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^s}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} > 0$$

aus der Konvergenz der allgemeinen harmonischen Reihe über das Grenzwertkriterium die Konvergenz der obigen Reihe für alle $s > 0$.

□

Aufgabe 16 (2) *Minorantenkriterium*
Beweisen Sie das Minorantenkriterium:
Falls die beiden Folgen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ der Bedingung[9]

$$0 \leq b_n \leq a_n \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

genügen und zusätzlich die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ divergiert, so divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$.
Weisen Sie nun mit diesem Kriterium nach, dass die folgenden Reihen divergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k+1}$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k}{5k^2+3k+7}$

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-k + \sqrt{k^2+1}\right)$

Lösung.
Es gelten die in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen.
Angenommen, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wäre konvergent, dann wäre wegen

$$b_n \overset{b_n \geq 0}{=} |b_n| \leq a_n \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ auch konvergent nach dem Majorantenkriterium (Widerspruch zur Annahme). Folglich muss $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch divergent sein.

i) Die Reihe divergiert wegen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \quad \cdots, \quad \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wobei man letzteres bei Interesse mit Induktion beweisen kann. Mit dem Minorantenkriterium folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

[9] Im Gegensatz zum Majorantenkriterium dürfen wir hier nicht den Betrag um a_n setzen. Für diese Variante des Satzes findet sich mit der harmonischen und der alternierenden harmonischen Reihe ein Gegenbeispiel.

ii) Aus

$$0 \leq \frac{1}{3k-1} \geq \frac{1}{3k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

die Divergenz der Reihe mit dem Minorantenkriterium.

iii) Da hier die Summanden keine Nullfolge bilden ist eigentlich sofort klar, dass die Reihe nicht konvergiert, aber auch mit der Minorante

$$\frac{3k}{k+1} \geq \frac{3k}{k+k} = \frac{3}{2} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

kann man sich das nochmal klarmachen.

iv) Auch hier ist die Summandenfolge keine Nullfolge. Wir schätzen wie in iii) ab

$$\frac{k^2+2k}{5k^2+3k+7} \geq \frac{k^2}{5k^2+3k^2+7k^2} = \frac{1}{15} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und versichern uns der Divergenz mit Minorantenkriterium.

v) Hier bilden die Summanden eine Nullfolge, also müssen wir genauer hinschauen. Ohne die Wurzel würden wir vermuten, dass die Reihe sich wie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ verhält, mit ihr damit wie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ also schätzen wir wieder ab

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{k(k+k)}} = \frac{1}{\sqrt{2}k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und da die harmonische Reihe divergiert tut es auch diese nach Minorantenkriterium.

vi) Hier bemerken wir zunächst, dass alle Summanden der Folge positiv sind und wir daher überhaupt das Kriterium anwenden können.
Dann schätzen wir mit der dritten binomischen Formel ab

$$-k+\sqrt{k^2+1} = \left(\sqrt{k^2+1}-k\right)\frac{\sqrt{k^2+1}+k}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{k^2+1-k^2}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{k^2+k^2}+k} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und damit nach Minorantenkriterium die Divergenz der Reihe wegen der der harmonischen Reihe.

□

Aufgabe 17 (2) *Turmbau zu Babel*
Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von unendlich vielen Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetz.

a) Wie hoch wird der Turm?

b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

Lösung.

a) Die Höhe des Turms entspricht der Summe der Höhe der einzelnen Würfel, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und da diese Reihe (genannt die harmonische Reihe) gegen ∞ divergiert wird der Turm unendlich hoch.

b) Die benötigte Farbe hängt von der Mantelfläche des Turms ab. Eine Seite des jeweiligen Würfels hat den Flächeninhalt $\frac{1}{n^2}$, da seine Seitenlänge $\frac{1}{n}$ beträgt. Bei jedem Würfel gehen die vier Außenseiten, sowie der Deckel mit ein. Allerdings fehlt auf dem Deckel noch die untere Seite des nächstgrößeren Würfels (da dieser auf dort auf dem unteren aufliegt). Es ergibt sich für die gesamte Mantelfläche also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(5\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 5\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

und da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (siehe Aufgabe 11) kommt man mit endlich viel Farbe hin.

c) Das Volumen des Turmes beträgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

und da auch diese Reihe (nach dem Majorantenkriterium, siehe Aufgabe 13) konvergiert kann man den Turm auch theoretisch mit endlich viel Beton bauen.

□

Aufgabe 18 (2-3) *Monotoniesatz für Reihen*
Wir bereits vorher angemerkt, kann man Reihen als Grenzwerte der Folgen ihrer Partialsummen betrachten. Daher erhält man aus den Konvergenzkriterien von Folgen auch Konvergenzkriterien für Reihen (vgl. Sandwichlemma und Majorantenkriterium).
Weisen Sie mit dem Monotoniesatz für Folgen das folgende Monotoniekriterium für Reihen nach:

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \geq 2$.
Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1,2,\ldots}$ (nach oben) beschränkt ist.

Aufgabe 19 (3) *Verdichtungskriterium*
Folgern Sie nun aus der vorherigen Aufgabe:
Ist $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ eine reelle, positive und monoton fallende Folge, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Tipp: Nach dem vorherigen Satz ist für solche Reihen ihre Konvergenz äquivalent zu ihrer Beschränktheit, also überlegen Sie sich, wie die Beschränktheit der rechten Reihe mit der der linken zusammenhängt.
Nutzen Sie diesen Satz nun um das Konvergenzkriterium der allgemeinen harmonischen Reihe zu beweisen: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

Lösung.
Sei also $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ eine reelle, positive und monoton fallende Folge.
Um die Aussage der vorherigen Aufgabe benutzen zu können, müssen wir überprüfen, wann eine der beiden Reihen (in unserem Fall die rechte) beschränkt ist. Betrachte dafür:
Aus der Monotonie der Summanden folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2^{n-1} a_{2^n} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{2^n} \leq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k$$

sowie

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \leq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{2^n-1} = 2^{n-1} a_{2^n-1}.$$

Folglich ist die Folge der Partialsummen der ersten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ genau dann beschränkt, wenn es die der zweiten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sind. Damit folgt aber auch die Äquivalenz ihrer Konvergenz mit der vorherigen Aufgabe.
Zur Konvergenz der allgemeinen harmonischen Reihe:
Für $\alpha \leq 0$ ist $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ keine Nullfolge und damit die Reihe divergent nach dem Trivialkriterium (vgl. Aufgabe 8).
Für $\alpha > 0$ ist $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ eine positive, monoton fallende Folge, und nach dem eben bewiesenen Verdichtungskriterium gilt damit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1-\alpha}}\right)^n \text{ konvergiert}$$

$$\overset{geom. Reihe}{\Leftrightarrow} \quad 2^{1-\alpha} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

$\square$

Aufgabe 20 (2) *Leibnizkriterium*
Untersuchen Sie folgende alternierende Reihen auf Konvergenz:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(\frac{1}{k})$ v) $\sum_{k=1}^{\infty} \Big((-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\Big)$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{k^2-1}$ iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos(\frac{1}{k})$ vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

Sind die konvergenten Reihen auch absolut konvergent?

Lösung.

i) Die alternierende harmonische Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da

$$a_k := \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

eine nicht-negative, (streng) monoton fallende Nullfolge definiert.
Sie konvergiert nicht absolut, da die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

nach Aufgabe 16 divergiert.

ii) Auch diese Reihe konvergiert, denn

$$a_k := \frac{2k+1}{k^2-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

definiert wieder eine monoton fallende Nullfolge.
Für die Monotonie betrachte

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+3)(k^2-1)}{(2k+1)((k+1)^2-1)} = \frac{2k^3+3k^2-2k-3}{(2k+1)(k^2+2k)}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2-2k-3}{2k^3+5k^2+2k} \leq \frac{2k^3+5k^2+2k}{2k^3+5k^2+2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sie konvergiert aber nicht absolut, da die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2-1}$$

nach dem Minorantenkriterium (oder dem Grenzwertkriterium mit $b_k = \frac{1}{k}$) divergiert.

iii) Wiedermals ist die Folge

$$a_k := \sin\left(\frac{1}{k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

eine monoton fallende Nullfolge.
Monotonie:
Der Sinus ist bekanntlich auf dem Interfall $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton steigend, das heißt

$$\forall x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : x \leq y \quad \Rightarrow \quad \sin(x) \leq \sin(y)$$

daraus folgt mit
$$\forall k \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]\right) \wedge \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$$
die Monotonie
$$\forall k \in \mathbb{N} : a_{k+1} = \sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \overset{s.o.}{\leq} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = a_k.$$
Nullfolge:
Da der Sinus stetig ist (siehe Kapitel "Stetigkeit") können wir den Grenzwert in die Funktion ziehen und es gilt
$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \sin\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) = \sin(0) = 0.$$
Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(\frac{1}{k})$$
divergiert nach Minorantenkriterium absolut, denn es existiert ein $\delta > 0$, sodass $\sin x \geq \frac{x}{2}$ für alle $x \in [0, \delta]$ ist, bzw. $\sin(\frac{1}{k}) \geq \frac{1}{2k}$ für hinreichend große k.

iv) Hier können wir das Leibnizkriterium nicht verwenden, da
$$a_k := \cos\left(\frac{1}{k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
keine Nullfolge darstellt
$$\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right) = \cos\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) = \cos(0) = 1.$$
Dadurch wissen wir aber, dass die Summanden mit geradzahligem Index keine Nullfolge bilden und damit die Folge der Summanden selbst auch nicht. Nach dem Trivialkriterium ist damit die Reihe divergent.

v) Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, denn
$$a_k := \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
ist mototon fallend, wegen
$$a_{k+1} - a_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{k+2} - \sqrt{k} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
und außerdem Nullfolge wegen
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 0.$$
Sie konvergiert aber nicht absolut, da die Folge der Partialsummen
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
divergiert.

vi) Hier kann das Leibnizkriterium auch wieder nicht verwendet werden, da

$$a_k := \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

keine Nullfolge ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1.$$

Allerdings wissen wir damit wie in iii), dass die Folge der Summanden mit geradzahligem Index keine Nullfolge ist und damit die Folge der Summanden auch nicht, weswegen die Reihe wegen des Trivialkriteriums divergieren muss.

□

Aufgabe 21 (3) *Bedingungen Leibnizkriterium*
Im 19. Jahrhundert wies der belgische Mathematiker E. C. Catalan anhand des folgenden Beispiels

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} \pm \cdots$$

darauf hin, dass für das Leibnizsche Konvergenzkriterium für Reihen die Monotonievoraussetzung wesentlich ist. Diskutieren Sie Catalans Beispiel.

Aufgabe 22 (2) *Quotienten-/Wurzelkriterium*
Untersuchen Sie folgende Reihen mittels eines geeigneten Konvergenzkriteriums auf Konvergenz:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{2k}}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(3k)!}$ v) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ vii) $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}}$ vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ viii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{k}{2}}{k^2}$

Lösung.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{2k}}$ konvergiert als geometrische Reihe. Das Wurzelkriterium ist eine weitere Möglichkeit das zu überprüfen.

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ konvergiert nach Wurzelkriterium.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(3k)!}$ konvergiert nach Quotientenkriterium.

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ divergiert nach dem Trivialkriterium.

vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

vii) $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

viii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{k}{2}}{k^2}$ divergiert nach dem Trivialkriterium.

$\square$

Aufgabe 23 (1) *Reelle Konvergenzradien*
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden reellen Potenzreihen:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k$

iv) $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k$

Aufgabe 24 (2) *Reelle Potenzreihen*
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden reellen Potenzreihen konvergieren:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ii) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

Aufgabe 25 (2) *Komplexe Konvergenzradien*
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden komplexen Potenzreihen:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} k^m m^k z^k$ mit $m \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} z^k$

iii) $z + 4z^2 + 27z^3 + 256z^4 + 3125z^5 + \ldots$

iv) $1 + \frac{2}{1}z + \frac{4}{2}z^2 + \frac{8}{6}z^3 + \frac{16}{24}z^4 + \frac{32}{120}z^5 + \ldots$

Aufgabe 26 (2) *Komplexe Potenzreihen*
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden reellen Potenzreihen konvergieren:

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2(k!)}$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2k}}{(1+\frac{1}{k})^k}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k (z+2)^k$

Aufgabe 27 (2) *Potenzreihe mit Konvergenzradius gleich Null*
Finden Sie eine komplexe Potenzreihe, welche den Konvergenzradius R = 0 besitzt, d.h. die nur in z = 0 konvergiert.

Aufgabe 28 (4) *Cauchyprodukt reeller Potenzreihen*
Gegeben seien die reellen Potenzreihen:

$$P_1(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} \quad \text{und} \quad P_2(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{2^k} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren P_1 und P_2? Liegt absolute Konvergenz vor?

ii) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt $P_1 \cdot P_2$. Geben Sie insbesondere die ersten fünf Koeffizienten der Produktreihe an.

iii) Geben Sie ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ an, sodass für alle $x \in (a, b)$ das Cauchyprodukt absolut konvergiert.